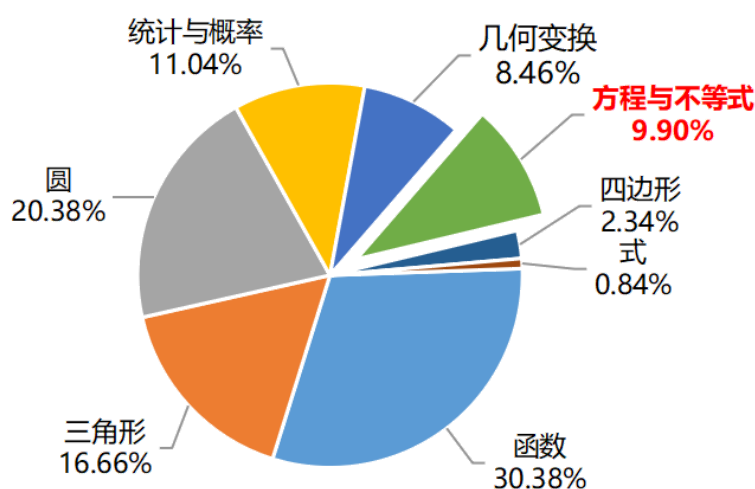


# 第1讲 一元二次方程基础

一元二次方程属于人教版教材第二十一章的内容，后续也会与二次函数进行综合。本模块《一元二次方程》，重点包括一元二次方程的解法、根系关系及实际应用问题，需要学生在理解概念及解法的基础上，进行实际应用，为后续相关知识的学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为一元二次方程基础、一元二次方程的实际应用2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

## 知己知彼



| 知识点         | 难度    | 考频 |
|-------------|-------|----|
| 一元二次方程的概念   | ★★    | 低  |
| 一元二次方程的解法   | ★★    | 高  |
| 一元二次方程的判别式  | ★★★★  | 高  |
| 一元二次方程的根系关系 | ★★★★★ | 中  |
| 一元二次方程的实际应用 | ★★★★★ | 高  |

## 一、一元二次方程的概念

## 一元二次方程

一元二次方程概念：只含有\_\_\_\_\_，并且未知数的最高次数是\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_为二次项系数；\_\_\_\_\_为一次项系数，\_\_\_\_\_为常数项。

一元二次方程的识别：

- ①一元二次方程是\_\_\_\_\_方程，即方程的两边都是关于未知数的\_\_\_\_\_；
- ②一元二次方程是\_\_\_\_\_方程，即方程中只含有\_\_\_\_\_未知数；
- ③一元二次方程是\_\_\_\_\_方程，也就是方程中未知数的最高次数是\_\_\_\_\_；

特别地，对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ：

当 $a$ \_\_\_\_\_时，为\_\_\_\_\_方程；当 $a$ \_\_\_\_\_  $b$ \_\_\_\_\_时，为\_\_\_\_\_方程

一元二次方程的解：使方程左右两边\_\_\_\_\_的未知数的值就是这个一元二次方程的\_\_\_\_\_，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的\_\_\_\_\_

### 【备注】 1、一元二次方程概念：

只含有1个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程，叫做一元二次方程。

### 2、一元二次方程的一般式：

$ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )， $a$ 为二次项系数， $b$ 为一次项系数， $c$ 为常数项。

#### ！注意：

①“ $a \neq 0$ ”是一元二次方程的一般形式的重要组成部分。当 $a = 0$ ,  $b \neq 0$ 时，它就成为一元一次方程。如果明确了 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程，就隐含 $a \neq 0$ 这个条件。

②任何一个一元二次方程经过整理都能化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )。在判断一个方程是不是一元二次方程时，要先化成一般形式，再判断

③二次项系数，一次项系数和常数项都是在一般形式下定义的，所以在确定一元二次方程各项的系数时，应先将方程化为一般形式。

④项的系数包括它前面的符号。如： $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一次项系数是 $-3$ ，而不是 $3$ 。

⑤若一元二次方程化为一般形式，没出现一次项 $bx$ ，则 $b = 0$ 。

### 3、一元二次方程的识别：

①一元二次方程是整式方程，即方程的两边都是关于未知数的整式；

②一元二次方程是一元方程，即方程中只含有一个未知数；

③一元二次方程是二次方程，也就是方程中未知数的最高次数是2；

任何一个关于 $x$ 的一元二次方程经过整理都可以化为一般式 $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )。

要特别注意对于关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $a \neq 0$ 时，方程是一元二次方程；当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时，方程是一元一次方程。

### 4、一元二次方程的解：

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根。

### 栗子1

#### 1. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期中第1题3分 ★

下列方程中，是一元二次方程的是（ ）。

- A.  $3x - 5 = 6(x - 1)$     B.  $x^2 - 3y + 1 = 0$     C.  $x^2 - 2x - 7 = 0$     D.  $\frac{1}{x} = x^2 + 3$

**【备注】**判定时注意将方程化为一般式

**【答案】** C

**【解析】** A 选项：有一个未知数，未知数的最高次项是一次，所以不是一元二次方程，本选项不符合题意，错误。

B 选项：有两个未知数，所以不是一元二次方程，本选项不符合题意，错误。

C 选项：有一个未知数，未知数的最高次项是二次，所以是一元二次方程，本选项符合题意，正确。

D 选项：含有分式方程，所以不是一元二次方程，本选项不符合题意，错误。  
故选 C。

**【标注】**【知识点】一元二次方程的定义

### 栗子2

#### 2. 2020~2021学年5月天津南开区日新国际学校初二下学期月考第3题3分 ★★

关于  $x$  的方程  $(a-1)x^2 + \sqrt{a+1}x + 2 = 0$  是一元二次方程，则  $a$  的取值范围是（ ）。

- A.  $a \neq 1$     B.  $a \geq -1$  且  $a \neq 1$     C.  $a > -1$  且  $a \neq 1$     D.  $a \neq \pm 1$

**【备注】**除考虑一元二次方程  $a \neq 0$  外，还要考虑二次根式有意义的条件

**【答案】** B

**【解析】** 关于  $x$  的方程  $(a-1)x^2 + \sqrt{a+1}x + 2 = 0$  是一元二次方程，

则： $a+1 \geq 0$  且  $a-1 \neq 0$ ；

解得： $a \geq -1$  且  $a \neq 1$ 。

故选 B。

**【标注】**【知识点】由一元二次方程定义求参数的值

### 栗子3

#### 3. 2020~2021学年10月天津和平区和和平区第九十中学初三上学期月考第5题3分 ★★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $m(x-h)^2 - k = 0$  ( $m$ 、 $h$ 、 $k$  均为常数且  $m \neq 0$ ) 的解是  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ , 则关于  $x$  的一元二次方程  $m(x-h+3)^2 = k$  的解是 ( ) .

- A.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$       B.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$       C.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$       D.  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$

**【备注】** 利用一元二次方程的根解决：

将  $m(x-h+3)^2 = k$  看作  $m[(x+3)-h]^2 - k = 0$ , 此时将  $x+3$  看作未知数, 则该方程与原方程系数完全相同, 另  $x+3=2$  或  $5$  即可

**【答案】** D

**【解析】** 原方程可化为  $(x-h)^2 = \frac{k}{m}$ ,

由题意可知  $\frac{k}{m} \geq 0$ ,

$$\therefore x-h = \pm \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$\therefore$  方程的两根分别为  $h + \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $h - \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

方程  $m(x-h+3)^2 = k$  可化为  $(x-h+3)^2 = \frac{k}{m}$ ,

$$\therefore x-h+3 = \pm \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$\therefore$  该方程的两根分别为  $h + \sqrt{\frac{k}{m}} - 3$ ,  $h - \sqrt{\frac{k}{m}} - 3$ .

由题意得  $h + \sqrt{\frac{k}{m}} = 5$ ,  $h - \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$ ,

$\therefore h + \sqrt{\frac{k}{m}} - 3 = 5 - 3$ ,  $h - \sqrt{\frac{k}{m}} - 3 = 2 - 3$ , 即  $x = 2$  或  $x = -1$ .

故选 D.

**【标注】** 【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

#### 栗子4

#### 4. 2019~2020学年天津河东区初三上学期期末第1题3分 ★★

若一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的一个根为  $-1$ , 则 ( ) .

- A.  $a+b+c=0$       B.  $a-b+c=0$       C.  $-a-b+c=0$       D.  $-a+b+c=0$

**【备注】** 考察方程根的定义

**【答案】** B

**【解析】**  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的一个根为  $-1$ ,

$\therefore x = -1$  满足关于  $x$  的一元二次方程,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

$\therefore (-1)^2 \cdot a - b + c = 0$ , 即  $a - b + c = 0$ .

故选 B .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

5. 2019~2020学年天津南开区天津市南开翔宇学校初三上学期开学考试第15题 ★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m+2)x^2 - 3x + m^2 - 4 = 0$  的一根为 0 , 则  $m$  的值为 \_\_\_\_\_ .

【备注】注意一元二次方程中  $m+2 \neq 0$

【答案】 2

【解析】把  $x = 0$  代入方程  $(m+2)x^2 + 3x + m^2 - 4 = 0$  得  $m^2 - 4 = 0$  ,

解得  $m_1 = 2$  ,  $m_2 = -2$  ,

因为  $m+2 \neq 0$  ,

所以  $m$  的值为 2 .

故答案为 : 2 .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

栗子5

6. 2019~2020学年10月天津河东区天津市育才中学初三上学期月考第4题3分 ★★

根据下列表格中二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的自变量  $x$  与函数值  $y$  的对应值 , 判断方程

$ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$  ,  $a$  ,  $b$  ,  $c$  为常数) 的一个解  $x$  的范围是 ( ) .

| $x$                 | 6.17  | 6.18  | 6.19 | 6.20 |
|---------------------|-------|-------|------|------|
| $y = ax^2 + bx + c$ | -0.03 | -0.01 | 0.02 | 0.04 |

A.  $6 < x < 6.17$

B.  $6.17 < x < 6.18$

C.  $6.18 < x < 6.19$

D.  $6.19 < x < 6.20$

【备注】此题考查一元二次方程的估算 :

若当  $x = x_1$  时 ,  $ax^2 + bx + c > 0$  ; 当  $x = x_2$  时 ,  $ax^2 + bx + c < 0$  , 则必有一根在  $x_1$ 、 $x_2$  之间

【答案】 C

【解析】函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与  $x$  轴的交点的横坐标就是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根 ,

函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象与  $x$  轴的交点的纵坐标为 0 .

由表中数据可知 :  $y = 0$  在  $y = -0.01$  与  $y = 0.02$  之间 ,

所以对应的  $x$  的值在 6.18 与 6.19 之间 ,

即  $6.18 < x_1 < 6.19$  .

故选 C .

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

## 二、一元二次方程的解法

### 1. 直接开方法

|                |                    |
|----------------|--------------------|
| 对于方程 $x^2 = p$ | 当 $p > 0$ 时, $x =$ |
|                | 当 $p = 0$ 时, $x =$ |
|                | 当 $p < 0$ 时, $x =$ |

【备注】！注意：

当  $p > 0$  时，注意有**正负**两个结果。

思考：

对于方程  $(mx + n)^2 = (px + q)^2$ ，可得到  $mx + n = \pm(px + q)$

【备注】直接开平方适用范围：

方程能转化为  $x^2 = p$ ， $(mx + n)^2 = p$  或  $(mx + n)^2 = (px + q)^2$  的形式

对于  $(mx + n)^2 = (px + q)^2$ ，可得到  $mx + n = \pm(px + q)$

采用直接开平方解一元二次方程的理论依据是**平方根**的定义。

栗子6

7. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第19题16分 ★★

解下列方程

$$4(x+1)^2 = 25.$$

【备注】先移项，然后利用直接开方法求解

【答案】(1)  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{7}{2}$ .

【解析】(1)  $4(x+1)^2 = 25$

$$(x+1)^2 = \frac{25}{4},$$

$$x+1 = \pm\frac{5}{2},$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}.$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

【方法】配方法

8. 2017~2018学年天津南开区初三上学期期中第19.1题4分 ★★

用适当方法解方程： $(3x - 1)^2 = (x + 1)^2$  .

【备注】利用思考中的方法进行直接开方

【答案】  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 0$  .

【解析】  $3x - 1 = x + 1$  或  $3x - 1 = -x - 1$  ,

$x_1 = 1$  ,  $x_2 = 0$  .

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

## 2. 配方法

通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法** .

配方是指方程两边都加上 一次项系数一半的平方，使左边配成一个完全平方式

用配方法解一元二次方程的步骤如下：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ 为常数且 } a \neq 0)$$

|            |  |
|------------|--|
| ①移项        |  |
| ②二次项系数化为 1 |  |
| ③配方        |  |
| ④开平方       |  |

【备注】用配方法解一元二次方程的步骤如下：

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ 为常数且 } a \neq 0)$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad ①$$

因为  $a \neq 0$ ，所以  $4a^2 > 0$ 。式子  $b^2 - 4ac$  的值有以下三种情况：

(1)  $b^2 - 4ac > 0$ ，这时  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ ，由①得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(2)  $b^2 - 4ac = 0$ ，这时  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ ，由①可知方程有两个相等的实数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

(3)  $b^2 - 4ac < 0$ ，这时  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ ，因此方程无实数根。

解下列方程：

( 1 )  $x^2 - 2x + 1 = 25$  .

( 2 )  $2x^2 - 5x + 1 = 0$  .

**【备注】**要求学生严格按照配方法的步骤求解

**【答案】** ( 1 )  $x_1 = 6$  ,  $x_2 = -4$  .

( 2 )  $x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$  ,  $x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$  .

**【解析】** ( 1 )  $x^2 - 2x + 1 = 25$

$$(x - 1)^2 = 25 .$$

于是得  $x - 1 = \pm 5$  ,

即  $x - 1 = 5$  或  $x - 1 = -5$  ,

$$x_1 = 6 , x_2 = -4 .$$

( 2 )  $2x^2 - 5x + 1 = 0$  ,

$$a = 2 , b = -5 , c = 1 ,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 17 > 0 ,$$

方程有两个不等的实数根 ,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} ,$$
$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4} , x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} .$$

**【标注】**【知识点】配方法求一元二次方程的根

### 3. 公式法

公式法是由配方法推导而来

当  $\Delta \geq 0$  时, 方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的实数根可写为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

的形式, 这个式子叫做一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的**求根公式** .

栗子8

10. 2017~2018学年天津红桥区初二下学期期末第18题8分 ★★

用适当的方法解下列方程：

$$1 - 2x^2 = 3x .$$

**【备注】**一定要让学生先将方程化为一元二次方程的一般式, 然后利用公式法求解; 培养学生良好的做题习惯

**【答案】** ( 1 )  $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$  ,  $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$  .

**【解析】** ( 1 )  $1 - 2x^2 = 3x$

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 ,$$

$$a = 2 , b = 3 , c = -1 ,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 8 = 17 > 0 ,$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} ,$$

$$\therefore x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} , x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} .$$

**【标注】**【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

## 4. 因式分解法

通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做配方法。

用配方法解一元二次方程的步骤如下：

- ( 1 ) 移项：把方程中含有未知数的项移到方程的左边，常数项移到方程的右边；
- ( 2 ) 二次项系数化为 1：根据等式的性质把二次项的系数化为“1”；
- ( 3 ) 配方：把方程 两边都加上一次项系数的一半的平方，使左边配成一个完全平方式；
- ( 4 ) 开平方：运用直接开平方法解方程。

**【备注】**可以回顾因式分解的步骤：

- ①提取公因式
- ②乘法公式
- ③十字相乘法
- ④分组分解法

### 栗子9

#### 11. 2019~2020学年天津津南区初三上学期中第20题8分 ★★★

用因式分解法解方程。

( 1 )  $x(2x - 5) = 2(2x - 5)$  .

( 2 )  $4x^2 - 4x + 1 = (x + 3)^2$  .

**【备注】**(1)利用提取公因式法因式分解

(2)先利用完全平方公式将左侧进行因式分解，然后利用平方差公式因式分解

**【答案】** ( 1 )  $x_1 = 2$  ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  .

( 2 )  $x_1 = -\frac{2}{3}$  ,  $x_2 = 4$  .

**【解析】** ( 1 )  $x(2x - 5) = 2(2x - 5)$

$$x(2x-5)-2(2x-5)=0$$

$$(x-2)(2x-5)=0$$

$$x_1=2, x_2=\frac{5}{2}.$$

$$(2) 4x^2-4x+1=(x+3)^2$$

$$(2x-1)^2-(x+3)^2=0$$

$$(2x-1+x+3)(2x-1-x-3)=0$$

$$(3x+2)(x-4)=0$$

$$x_1=-\frac{2}{3}, x_2=4.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

### 三、一元二次方程的判别式

一元二次方程  
判别式

对于方程  $ax^2+bx+c=0$   
( $a, b, c$  为常数且  $a \neq 0$ ),  
由配方法可得

当  $\Delta =$  \_\_\_\_\_, 方程有 \_\_\_\_\_ 个 \_\_\_\_\_ 的实数根

当  $\Delta =$  \_\_\_\_\_, 方程有 \_\_\_\_\_ 个 \_\_\_\_\_ 的实数根

当  $\Delta =$  \_\_\_\_\_, 方程 \_\_\_\_\_ 实数根

【备注】对于方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a, b, c$  为常数且  $a \neq 0$ ), 由配方法可得

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

所以：①当  $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$  方程有两个不相等的实数根

②当  $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$  方程有两个相等的实数根

③当  $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$  方程无实数根

！注意：

(1) 一元二次方程有实数根  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ , 当  $\Delta = 0$  时,  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ , 由于是二次方程所以还是要称方程根的个数是 **2**, 即 **两个相等实数根** (这里深层的原因是代数基本定理, 但这是一个超出中学数学范围的定理, 在此不作引申), 教师讲解时要注意.

(2) 当  $a, c$  异号时, 一元二次方程有两个不等实数根.

通过判断判别式  $\Delta$  的符号得到方程根的个数情况, 反过来也可以通过已知的方程根的个数得到  $\Delta$  的正负.

栗子10

12. 2019~2020学年10月天津和平区天津市第五十五中学初三上学期月考第4题3分 ★

已知一元二次方程  $x^2+x-1=0$ , 下列判断正确的是 ( ).

A. 该方程有两个相等的实数根

B. 该方程有两个不相等的实数根

C. 该方程无实数根

D. 该方程根的情况不确定

【备注】直接求解  $\Delta$  即可

【答案】B

【解析】已知一元二次方程  $x^2 + x - 1 = 0$  ,  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$  ,  
 $\therefore$  该方程有两个不相等的实数根 .

【标注】【知识点】一元二次方程根的判别式

栗子11

注意以下两题的区别

13. 2019~2020学年9月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第6题3分 ★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m-2)^2x^2 + (2m+1)x + 1 = 0$  有两个不相等的实数根 , 则  $m$  的取值范围是 ( ) .

A.  $m > \frac{3}{4}$

B.  $m \geq \frac{3}{4}$

C.  $m > \frac{3}{4}$  且  $m \neq 2$

D.  $m \geq \frac{3}{4}$  且  $m \neq 2$

【备注】一元二次方程成立的前提为  $m-2 \neq 0$

【答案】C

【解析】根据题意列出方程组  $\begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m-2)^2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases}$  ,

解之得  $m > \frac{3}{4}$  且  $m \neq 2$  .

故选 : C .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

14. 2015~2016学年天津南开区初二下学期期末第16题3分 ★★

若关于  $x$  的方程  $mx^2 - 4x + 1 = 0$  有实数根 , 则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

【备注】题中没强调一元二次方程 , 因此需要分类讨论  $m$  是否为 0

【答案】  $m \leq 4$

【解析】  $\because$  关于  $x$  的方程  $mx^2 - 4x + 1 = 0$  有实数根 ,

$\therefore$  ①当为一次方程 , 即  $m = 0$  , 符合 .

②当为二次方程 , 即  $m \neq 0$  , 且  $\Delta \geq 0$  ,

$$\Delta = 16 - 4m \geq 0 ,$$

$$\therefore m \leq 4 \text{ 且 } m \neq 0 ,$$

$$\therefore \text{ 综上 } m \leq 4 .$$

**【标注】【知识点】**由一元二次方程根的情况确定参数

## 栗子12

### 15. 2016~2017学年天津红桥区初三上学期期中第22题10分 ★★★

已知关于  $x$  的方程  $x^2 - (2k+1)x + 4\left(k - \frac{1}{2}\right) = 0$  .

( 1 ) 求证：无论  $k$  为何值时，方程总有两个实数根 .

( 2 ) 若等腰  $\triangle ABC$  的一边长  $a = 4$ ，另两边  $b$ 、 $c$  恰好是这个方程的两个实数根，求  $\triangle ABC$  的周长 .

**【备注】**涉及到三角形问题还需要分析三角形三边关系

**【答案】**( 1 ) 证明见解析 .

( 2 )  $\triangle ABC$  的周长为 10 .

**【解析】**( 1 ) 方程化为一般形式为： $x^2 - (2k+1)x + 4k - 2 = 0$  ,

$$\therefore \Delta = (2k+1)^2 - 4(4k-2) = (2k-3)^2 ,$$

$$\text{而 } (2k-3)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore \Delta \geq 0 ,$$

所以无论  $k$  取任何实数，方程总有两个实数根 .

$$( 2 ) \quad x^2 - (2k+1)x + 4k - 2 = 0 ,$$

$$\text{整理得 } (x-2)[x-(2k-1)] = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = 2 , \quad x_2 = 2k-1 ,$$

当  $a = 4$  为等腰  $\triangle ABC$  的底边，则有  $b = c$  ,

因为  $b$ 、 $c$  恰是这个方程的两根，则  $2 = 2k-1$  ,

解得  $k = \frac{3}{2}$ ，则三角形的三边长分别为：2, 2, 4 ,

$\therefore 2+2=4$ ，这不满足三角形三边的关系，舍去；

当  $a = 4$  为等腰  $\triangle ABC$  的腰，

因为  $b$ 、 $c$  恰是这个方程的两根，所以只能  $2k-1 = 4$  ,

则三角形三边长分别为：2, 2, 4 ,

此时三角形的周长为  $2+4+4=10$  .

所以  $\triangle ABC$  的周长为 10 .

**【标注】【知识点】**一元二次方程根与系数的关系

## 16. 2014~2015学年3月北京东城区北京二中分校初三下学期月考第21题5分 ★★

已知：关于  $x$  的一元二次方程  $kx^2 + 2x + 2 - k = 0 (k \geq 1)$  .

(1) 求证：方程总有两个实数根 .

(2) 当  $k$  取哪些整数时，方程的两个实数根均为整数 .

**【备注】** 整数解这部分需要利用分离常数法求解：

情况一：分子为常数（只考虑分母）

$$\textcircled{1} x = \frac{6}{k}, \text{ 则 } k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 3, k = \pm 6;$$

$$\textcircled{2} x = \frac{1}{k+1}, k+1 = \pm 1, \text{ 则 } k = 0, k = -2;$$

$$\textcircled{3} x = \frac{2}{k+1}, k+1 = \pm 1, k+1 = \pm 2, \text{ 则 } k = 0, k = -2, k = 1, k = -3;$$

情况二：分子中含有字母（分离常数法）

$$\textcircled{1} x = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}, \text{ 则 } k = \pm 1;$$

$$\textcircled{2} x = \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}, k+1 = \pm 1, \text{ 则 } k = 0, k = -2;$$

$$\textcircled{3} x = \frac{k-1}{k+1} = \frac{k+1-1-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}, k+1 = \pm 1, k+1 = \pm 2, \text{ 则 } k = 0, k = -2, k = 1, k = -3;$$

$$\textcircled{4} x = \frac{2k}{k+1} = \frac{2k+2-2}{k+1} = 2 - \frac{2}{k+1}, k+1 = \pm 1, k+1 = \pm 2, \text{ 则 } k = 0, k = -2, k = 1, k = -3;$$

$$\textcircled{5} x = \frac{2k-1}{k+1} = \frac{2k+2-2-1}{k+1} = 2 - \frac{3}{k+1}, k+1 = \pm 1, k+1 = \pm 3, \text{ 则 } k = 0, k = -2, k = 2, k = -4;$$

$$\textcircled{6} x = \frac{k^2+1}{k} = \frac{k^2}{k} + \frac{1}{k} = k + \frac{1}{k}, \text{ 则 } k = \pm 1.$$

**【答案】** (1) 答案见解析

(2) 当  $k = 1$  或  $k = 2$  时，方程的两个实数根均为整数

**【解析】** (1) 证明： $\Delta = 2^2 - 4k(2-k) = 4(k-1)^2$ ,

$$\because k \geq 1,$$

$$\therefore 4(k-1)^2 \geq 0, \text{ 即 } \Delta \geq 0,$$

$\therefore$  方程总有两个实数根 .

$$(2) \text{ 解：方程的根为 } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4(k-1)^2}}{2k} = \frac{-1 + (k-1)}{k} = \frac{k-2}{k} = 1 - \frac{2}{k},$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4(k-1)^2}}{2k} = \frac{-1 - (k-1)}{k} = \frac{-k}{k} = -1,$$

$$\because k \geq 1, \text{ 且 } k \text{ 为整数},$$

$\therefore$  当  $k = 1$  或  $k = 2$  时，方程的两个实数根均为整数 .

**【标注】** 【知识点】一元二次方程根的判别式

## 四、一元二次方程的根系关系

一元二次方程的根系关系即**韦达定理**：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比。

即对于方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )，当  $\Delta \geq 0$ ，方程两根为  $x_1$ 、 $x_2$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}.$$

**【备注】** 韦达定理应用的前提就是： $\Delta \geq 0$

### ！总结：

几个重要变形：

$$\textcircled{1} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2;$$

$$\textcircled{2} (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2;$$

$$\textcircled{3} |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2};$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$$

**【备注】** ①、②、③利用完全平方公式之间的关系相互推导；

④利用分式通分进行变形

### 栗子13

#### 💡 直接利用韦达定理求解

#### 17. 2016~2017学年天津河北区初二下学期期末第18题8分 ★★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 6x + (2m + 1) = 0$  有实数根。

(1) 求  $m$  的取值范围。

(2) 如果方程的两个实数根为  $x_1$ ， $x_2$ ，且  $2x_1 x_2 + x_1 + x_2 > 4$ ，求  $m$  的取值范围。

**【备注】** (2) 要注意韦达定理应用的前提是  $\Delta \geq 0$ ，这部分希望学生能养成好的习惯涉及到含参方程，先去求  $\Delta$

(注：栗子22题即考察学生韦达定理隐含条件掌握的情况)

**【答案】** (1)  $m \leq 4$ 。

(2)  $-1 < m \leq 4$ 。

**【解析】** (1) 若  $x^2 - 6x + (2m + 1) = 0$  有实数根，

$$a = 1, b = -6, c = 2m + 1,$$

根据  $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times (2m + 1) \geq 0$ ,

解得  $m \leq 4$ .

(2) 根据韦达定理可得,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{c} = \frac{2m+1}{1} = 2m+1,$$

又  $\because 2x_1x_2 + x_1 + x_2 > 4$ ,

$$\therefore 2(2m+1) + 6 > 4,$$

解得  $m > -1$ ,

故  $m$  的取值范围是  $-1 < m \leq 4$ .

**【标注】**【知识点】一元二次方程根与系数的关系

18. 2017~2018学年10月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第20题 ★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 6x - k^2 = 0$  ( $k$  为常数)

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 设  $x_1, x_2$  为方程的两个实数根, 且  $x_1 + 2x_2 = 14$ , 试求出方程的两个实数根和  $k$  的值.

**【备注】**(2) 先利用韦达定理求出  $x_2$ , 然后直接利用韦达定理求出方程的解

**【答案】**(1) 证明见解析.

(2) 方程两根为  $x_1 = -2, x_2 = 8$ ,  $k$  的值为 4 或 -4.

**【解析】**(1)  $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-k^2)$ ,

$$= 36 + 4k^2,$$

$$\because 4k^2 \geq 0,$$

$$\therefore 4k^2 + 36 > 0 \text{ 恒成立},$$

$\therefore$  方程有两个不相等的实数根.

(2)  $\because x_1, x_2$  为方程的两个实数根,

由韦达定理得  $x_1 + x_2 = 6, x_1 \cdot x_2 = -k^2$ ,

$$\because x_1 + 2x_2 = 14,$$

$$\therefore 6 + x_2 = 14,$$

得  $x_2 = 8$ ,

$$\therefore x_1 = -2,$$

$$\therefore (-2) \times 8 = -k^2,$$

解得  $k = 4$  或  $k = -4$ ,

$\therefore$  方程两根为  $x_1 = -2, x_2 = 8$ ,  $k$  的值为 4 或 -4.

**【标注】**【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子14

与方程的根结合

19. 2017~2018学年10月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第15题3分 ★★★

设  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $x^2 + 4x - 3 = 0$  的两根, 且  $2x_1(x_2^2 + 5x_2 - 3) + a = 2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【备注】先利用降幂的思想, 将  $x_2$  代入方程中进行化简, 然后利用韦达定理求解

【答案】 8

【解析】根据题意得  $x_1 + x_2 = -4$ ,  $x_1 x_2 = -3$ ,  
所以原式化简得  $-6(x_1 + x_2) + 10x_1 x_2 + a = 2$ ,  
代入可得  $a = 8$ .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

栗子15

韦达定理的变形

20. 2019~2020学年10月天津河东区天津市第一零二中学初三上学期月考第17题3分 ★★

方程  $2x^2 + 3x - 1 = 0$  的两个根为  $x_1, x_2$ , 则  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  的值等于 \_\_\_\_\_.

【备注】  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$

【答案】 3

【解析】根据题意得  $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_1 x_2 = -\frac{1}{2}$ ,  
 $\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = 3$ .

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

21. 2015~2016学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初二下学期期末第19题8分 ★★★

已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 2 = 0$ .

(1) 若方程有实数根, 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 若方程两实数根分别为  $x_1, x_2$ , 且满足  $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|$ , 求实数  $m$  的值.

【备注】(2)  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

【答案】(1)  $m \geq -\frac{1}{12}$ .

(2)  $m = 2$

【解析】(1)  $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$  有实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0, \text{ 即 } (2m+3)^2 - 4(m^2+2) \geq 0,$$

$$\therefore m \geq -\frac{1}{12}.$$

(2) 根据题意得  $x_1 + x_2 = 2m+3$ ,  $x_1 x_2 = m^2 + 2$ ,

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 31 + |x_1 x_2|,$$

$$\text{即 } (2m+3)^2 - 2(m^2+2) = 31 + m^2 + 2,$$

$$\text{解得 } m = 2, m = -14 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore m = 2.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

## 栗子16

需根据判别式的正负选取参数

22. 2015~2016学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第10题3分 ★★★

菱形  $ABCD$  的边长是 5, 两条对角线交于  $O$  点, 且  $AO$ ,  $BO$  的长分别是关于  $x$  的方程

$$x^2 + (2m-1)x + m^2 + 3 = 0 \text{ 的根, 则 } m \text{ 的值为 ( )}.$$

A. -3

B. 5

C. 5或-3

D. -5或3

【备注】此题需要利用菱形对角线互相垂直的性质求解, 即  $OA^2 + OB^2 = 5^2$ ; 在利用韦达定理求解之前, 一定要注意前提条件是  $\Delta \geq 0$

【答案】A

【解析】由勾股定理可得:  $AO^2 + BO^2 = 25$ , 又有根与系数的关系可得:  $AO + BO = -2m + 1$ ,

$$AO \cdot BO = m^2 + 3.$$

$$AO^2 + BO^2 = (AO + BO)^2 - 2AO \cdot BO = (-2m + 1)^2 - 2(m^2 + 3) = 25, \text{ 整理得:}$$

$$m^2 - 2m - 15 = 0, \text{ 解得: } m = -3 \text{ 或 } 5. \text{ 又 } \because \Delta > 0, \therefore (2m-1)^2 - 4(m^2+3) > 0, \text{ 解}$$

$$\text{得 } m < -\frac{11}{4}, \therefore m = -3.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

## 栗子17

逆用一元二次方程的定义构造方程

## 23. ★★★

设实数  $a, b$  满足  $3a^2 - 19a + 1 = 0$  且  $3b^2 + 19b + 1 = 0$ , 求  $a + b$  的值.

**【备注】** 利用方程解的定义, 将两个方程化为一样的形式, 即可得到原一元二次方程, 然后直接利用韦达定理求解

**【答案】**  $\pm \frac{\sqrt{349}}{3}$ .

**【解析】**  $\because 3(-b)^2 - 19(-b) + 1 = 0$ ,

$\therefore a, -b$  是  $3x^2 - 19x + 1 = 0$  的根,

①  $a = -b \Rightarrow a + b = 0$ ;

②  $a \neq -b$ ,

由韦达定理得

$$\begin{cases} a + (-b) = \frac{19}{3} \\ a \cdot (-b) = \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = \left(\frac{19}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = \frac{349}{9},$$

$$\therefore a+b = \pm \frac{\sqrt{349}}{3}.$$

**【标注】** 【知识点】利用构造的方程求解

## 栗子18

 逆用根系关系构造方程

## 24. 2020~2021学年10月重庆万州区万州第二高级中学初三上学期月考第9题4分 ★★

已知实数  $x_1, x_2$  满足  $x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 12$ , 则以  $x_1, x_2$  为根的一元二次方程是 ( ).

A.  $x^2 - 7x + 12 = 0$     B.  $x^2 + 7x + 12 = 0$     C.  $x^2 + 7x - 12 = 0$     D.  $x^2 - 7x - 12 = 0$

**【备注】** 判断每个选项中  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  是否满足条件

**【答案】** A

**【解析】** 以  $x_1, x_2$  为根的一元二次方程  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

**【标注】** 【知识点】一元二次方程根与系数的关系

## 25. ★★★

已知  $x, y$  是正整数, 并且  $xy + x + y = 23, x^2 y + xy^2 = 120$ , 求  $x^2 + y^2$  的值.

【备注】已知条件即为韦达定理，由韦达定理逆推出一元二次方程即可

【答案】 34 .

【解析】方法一：由于  $xy + (x + y) = 23$  ,  $xy \cdot (x + y) = 120$  ,

则  $xy$  与  $(x + y)$  为方程  $t^2 - 23t + 120 = 0$  的两个根，得到  $t_1 = 8$  ,  $t_2 = 15$

即  $xy = 8$  ,  $x + y = 15$  ① ;

或者  $xy = 15$  ,  $x + y = 8$  ② ;

①的时候  $x$ 、 $y$  为方程  $u^2 - 15u + 8 = 0$  的根， $\Delta_1 = 15^2 - 32 = 193$ ，不是完全平方数， $x$ 、 $y$  不可能为题目中要求的正整数，舍；

②的时候  $xy$  为方程  $u^2 - 8u + 15 = 0$  的根， $u_1 = 3$  ,  $u_2 = 5$ .

故  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 34$  .

方法二：令  $x + y = s$  ,  $xy = t$  .

则  $s + t = 23$  ,  $st = 120$  .

故可得  $s$  ,  $t$  为方程  $x^2 - 23x + 120 = 0$  的两根，

故可得： $s = 8$  ,  $t = 15$  或  $s = 15$  ,  $t = 8$  (舍去) .

则： $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2t = 34$  .

【标注】【知识点】利用构造的方程求解

## 独步天下2

### 26. 2004年竞赛第1题6分 ★★★

已知实数  $a \neq b$  , 且满足  $(a + 1)^2 = 3 - 3(a + 1)$  ,  $3(b + 1) = 3 - (b + 1)^2$  , 则  $b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}}$  的值为 ( ) .

A. 23

B. -23

C. -2

D. -13

【答案】 B

【解析】容易知道  $a, b$  是方程  $(x + 1)^2 = 3 - 3(x + 1)$  的两个根，

整理得  $x^2 + 5x + 1 = 0$  ,

于是有  $a + b = -5$  ,  $ab = 1$  , 于是  $a < 0$  ,  $b < 0$  ,

$$\begin{aligned} & b\sqrt{\frac{b}{a}} + a\sqrt{\frac{a}{b}} , \\ &= b\sqrt{\frac{b^2}{ab}} + a\sqrt{\frac{a^2}{ab}} , \\ &= \frac{b|b| + a|a|}{\sqrt{ab}} , \\ &= -\frac{(a^2 + b^2)}{\sqrt{ab}} , \end{aligned}$$

$$= -\frac{(a+b)^2 - 2ab}{\sqrt{ab}},$$

$$= -23,$$

故答案为 B .

**【标注】**【知识点】一元二次方程根与系数的关系